JOURNAL

DE

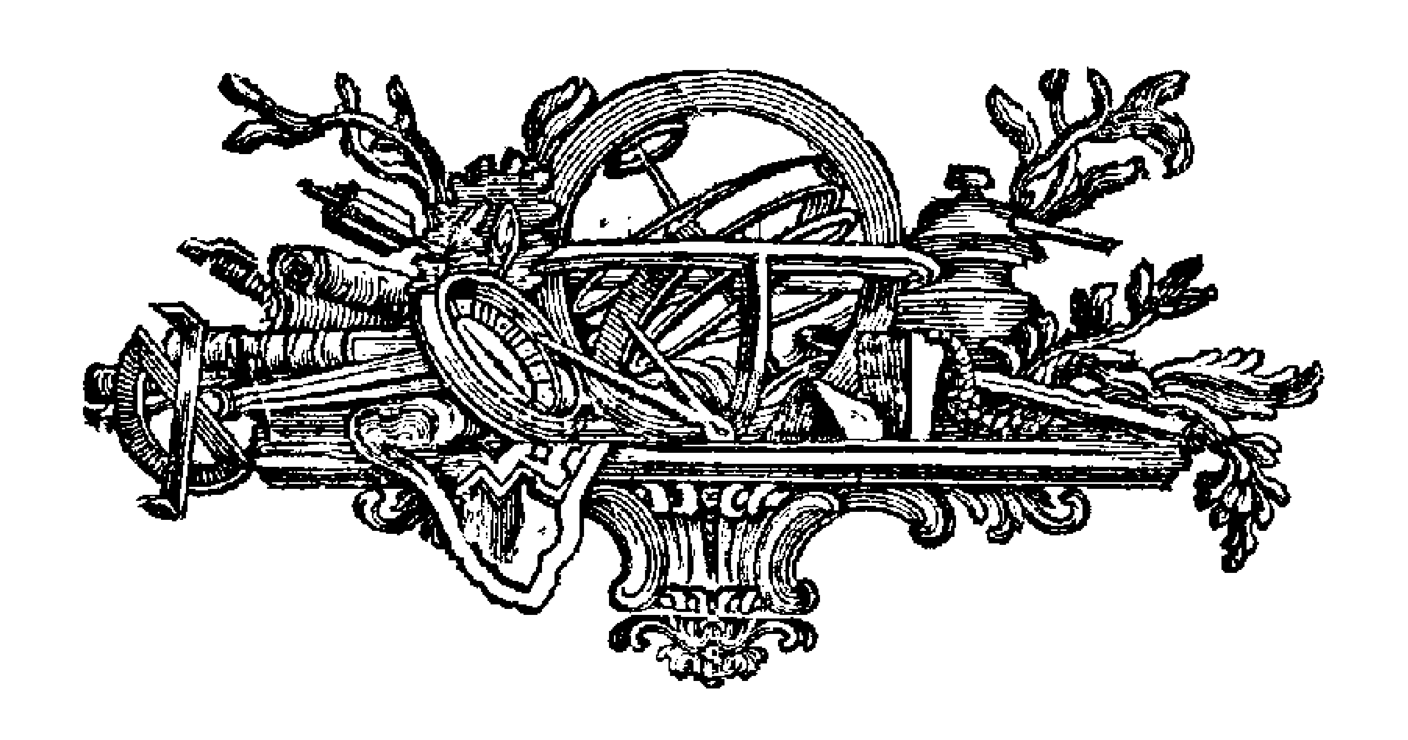
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL DE CET ÉTABLISSEMENT.

VINGTIÈME CAHIER.

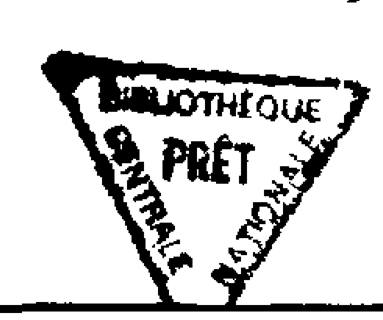
TOME XIII.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Février 1831.

Pér. 4°
5699



Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

MÉMOIRE

Sur le principe des forces vives dans les mouvemens relatifs des Machines;

PAR M. G. CORIOLIS.

LU À L'ACADÉMIE DES SCIENCES, LE 6 JUIN 1831.

LA détermination du mouvement d'un système de corps liés d'une manière quelconque à des points qui sont entraînés dans l'espace, est une des questions qui intéressent le plus la théorie des machines, particulièrement celle des roues hydrauliques. Jean Bernouilli a traité le mouvement d'un point matériel pesant dans un tube droit tournant horizontalement d'un mouvement uniforme autour d'un de ses points. M. Ampère, dans les *Annales de mathématiques*, a résolu la question analogue pour le cas où le tube décrit un cône vertical. On peut généraliser ces questions, en considérant le mouvement dans un canal entraîné dans l'espace d'une manière quelconque; mais ce dernier problème n'est encore qu'un cas particulier de celui dont je me suis occupé dans ce Mémoire. Il comprend les monvemens d'une machine quelconque dont certaines parties sont entraînées d'un mouvement donné. J'ai trouvé relativement à cette question une proposition assez générale qui, je crois, n'a pas encore été donnée : voici en quoi elle consiste.

Si un système de points matériels soumis à des forces est assujéti à des liaisons s'exprimant au moyen de coordonnées relatives à des plans qui se meuvent d'une manière quelconque; dans le mouvement par rapport à ces plans, on peut appliquer l'équation des forces vives en y faisant

entrer les vîtesses relatives, et les quantités d'action ou de travail qui se rapportent aussi aux déplacemens relatifs. Mais dans ces quantités d'action, en outre des forces qui sont immédiatement données et qui concourent au mouvement absolu, il faut en considérer d'autres dont il est facile d'indiquer la nature : elles sont opposées aux forces qu'il faudrait appliquer aux points matériels du système s'ils étaient libres, pour les obliger à conserver par rapport aux plans mobiles les positions relatives qu'ils ont à un instant donné, et à n'avoir ainsi que le mouvement qu'ils prendraient s'ils venaient à être invariablement liés à ces plans.

Pour mieux faire comprendre cette proposition par un exemple, nous supposerons ici qu'il s'agisse du mouvement d'un courant fluide glissant par l'effet de son poids dans un canal, pendant que celui-ci prend un mouvement de rotation autour d'un axe vertical. Dans ce cas, le principe qu'on vient d'énoncer apprend que, pour calculer l'accroissement de la demi-somme des forces vives du fluide, en n'ayant égard qu'aux vîtesses relatives au canal, il faudra ajouter à la quantité d'action due à la descente verticale de son centre de gravité, celle qui, dans le même mouvement relatif, résulterait pour chaque point d'une force de répulsion égale à la force centrifuge fictive que ce même point produirait à chaque instant si, contrairement à ce qui arrive, il restait à la place où il se trouve dans le canal et décrivait simplement un cercle autour de l'axe de rotation.

Lorsqu'il s'agit de l'équilibre d'un fluide contenu dans un vase tournant autour d'un axe, on voit immédiatement qu'il faut introduire des actions égales aux forces centrifuges; mais il n'en est plus de même pour le principe des forces vives appliqué au mouvement relatif : on se méprendrait si l'on regardait la proposition comme évidente, même dans cet exemple assez simple. Il est si peu évident qu'on doit introduire ces forces, que l'on arriverait à des résultats faux si l'on procédait ainsi pour toute autre équation que celle des forces vives.

Lorsque les questions de mouvement relatif à des plans mobiles ne renferment qu'une variable indépendante, le principe général qu'on vient d'énoncer suffira pour résoudre complètement le problème; il n'y a plus

d'autres difficultés à surmonter que l'intégration d'une équation entre le temps et une variable qui fixe la position du système. Les calculs s'achèvent complètement pour toutes les machines qui sont entraînées d'un mouvement de rotation autour d'axes verticaux, en supposant qu'il n'y ait d'autres forces extérieures que les poids des mobiles.

Le but pratique de ces questions étant de trouver la quantité d'action transmise à la machine pendant qu'elle est entraînée; j'ai cherché à simplifier l'expression de cette quantité en réduisant autant que possible celle qui résulte des forces introduites en vertu du mouvement de transport des axes mobiles. Voici comment on peut se représenter l'expression de cette dernière quantité. Il faut d'abord la concevoir partagée en deux parties : une première, qui est due aux forces opposées à celles qui produiraient sur chaque point le mouvement que prend un point donné pris pour origine des plans mobiles; et une seconde, qui est due aux forces opposées à celles qui produiraient la rotation autour de cette origine. L'expression de la première quantité s'obtient très-simplement; elle est nulle quand le centre de gravité du système ne se déplace pas par rapport aux plans mobiles. La valeur de la seconde offre plus de difficultés dans sa réduction. Pour en énoncer l'expression, nous remarquerons d'abord que dans le cas où les plans mobiles tournent avec une vîtesse angulaire constante autour d'un axe qui ne change pas de direction, elle est simplement l'accroissement que prendrait la force vive des points du système s'ils n'avaient dans leurs premières et dernières positions que les seules vîtesses d'entraînement axec les plans coordonnés mobiles. Dans le cas général, elle est égale à ce même accroissement de force vive diminuée de l'intégrale d'une certaine différentielle dont on peut se représenter assez facilement la valeur. On imaginera sur l'axe instantané de rotation des plans mobiles, un point situé à une distance de l'origine égale à la vîtesse angulaire. Ce point décrira une courbe par rapport à des plans coordonnés de direction constante passant par l'origine mobile. On concevra le plan normal à cette courbe, et l'on formera la somme des produits des masses multipliées par les projections sur ce plan des aires décrites pendant un temps infiniment petit par les rayons vecteurs

menés de l'origine aux points mobiles; la différentielle à intégrer sera le produit de cette somme multipliée par la vîtesse du point fictif pris sur l'axe instantané.

Cet énoncé montre quelle est l'influence de la variation de la vîtesse angulaire et du déplacement de l'axe instantané sur les quantités d'action dues aux forces qu'il faut introduire en raison du mouvement d'entraînement des plans coordonnés mobiles. On aperçoit qu'il y a des cas où cette quantité d'action se réduira comme si le mouvement de ces plans se faisait avec une vîtesse de rotation uniforme autour d'un axe invariable de direction. Il suffit pour cela que l'intégrale dont on vient de parler s'évanouisse entre les limites du mouvement.

Le principe des forces vives étendu aux mouvemens relatifs donne très-facilement une théorie exacte des roues hydrauliques comme celles de Borda ou turbines de M. Burdin. Pour les roues à aubes courbes de M. Poncelet, il montre que toutes les fois que l'eau sort de l'aube à la même distance de l'axe de rotation où elle est entrée, si l'on néglige les frottemens, elle ne peut avoir acquis ou perdu que la vîtesse relative due à l'action de la gravité, rapportée à la roue considérée comme immobile; de sorte que, d'après la forme ordinaire des aubes, la vîtesse relative de l'eau est plus grande en sortant qu'en entrant.

En appliquant le même principe général aux seuls mouvemens de translation, on en conclut la pression qu'une veine fluide produit contre un plan qu'elle vient choquer obliquement. Le résultat ne dépend ni des pertes d'action de toute nature qui peuvent avoir lieu par les frottemens dans le fluide, ni d'aucune hypothèse particulière, comme celles dont on avait eu besoin jusqu'à présent pour trouver cette pression. Il suffit d'admettre seulement que le plan est assez étendu pour permettre l'épanouissement de la veine. S'il y a frottement du fluide contre le plan, la même expression subsiste pour la composante normale au plan de la pression oblique que celui-ci éprouve de l'action du fluide. Par la méthode qui m'a conduit à ce résultat, on voit que, pour évaluer l'effet du choc d'une veine fluide sur les palettes inclinées d'une roue, il n'est pas nécessaire d'attribuer une valeur particulière à la force vive perdue par le choc; elle peut

être nulle ou elle peut être toute la force vive initiale, sans que la mesure de l'effet change de valeur.

Tels sont les résultats principaux de ce mémoire. Il me semble que le principe d'où ils découlent trouve assez d'applications dans la théorie des machines pour qu'on le mette au nombre des propositions de la mécanique rationnelle.

DÉMONSTRATION DU PRINCIPE DES FORCES VIVES APPLIQUÉ AUX MOUVEMENS RELATIFS QUELCONQUES.

Si l'on réprésente par x_1, y_1, z_1, les coordonnées relatives à des axes fixes dans l'espace pour les points matériels du système; par x, y, z, les coordonnées des mêmes points rapportées à des axes mobiles, et par ξ, η, ζ, les coordonnées de l'origine de ces axes mobiles; on aura par les formules connues,

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + ax + by + cz, \\ y_1 &= \eta + a'x + b'y + c'z, \\ z_1 &= \zeta + a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

On sait qu'entre les cosinus abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, on a les relations,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \\ aa' + bb' + cc' &= 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0; \end{aligned}$$

ou bien également,

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0. \end{aligned}$$

Nous supposerons que les liaisons qui subsistent pendant le mouvement soient exprimables entre les coordonnées x, y, z, relatives aux axes mobiles; les équations qui en résultent étant $L = 0$, $M = 0$, &c., on sait que l'on pourra regarder chaque point comme libre, pourvu qu'on ajoute des forces dont les composantes, suivant ces axes mobiles, seront exprimées par

$$\lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \&c.,$$
$$\lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \&c.,$$
$$\lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \&c.,$$

λ, μ, &c., étant des coefficiens arbitraires.

Ainsi, par exemple, lorsque les équations $L = 0$, $M = 0$, &c., seront celles de surfaces entraînées avec les axes mobiles, ces composantes $\lambda \frac{dL}{dx}$, $\mu \frac{dM}{dx}$, &c., seront celles de forces normales à ces surfaces.

Les projections de ces mêmes composantes sur les axes fixes seront

$$\text{sur celui des } x,\quad a\lambda \frac{dL}{dx} + b\lambda \frac{dL}{dy} + c\lambda \frac{dL}{dz} + \&c.,$$
$$\text{des } y,\quad a'\lambda \frac{dL}{dx} + b'\lambda \frac{dL}{dy} + c'\lambda \frac{dL}{dz} + \&c.,$$
$$\text{des } z,\quad a''\lambda \frac{dL}{dx} + b''\lambda \frac{dL}{dy} + c''\lambda \frac{dL}{dz} + \&c.$$

De sorte qu'en appelant $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, les composantes des forces données dans le sens des axes fixes, les équations du mouvement seront

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = X_{,} + a\lambda \frac{dL}{dx} + b\lambda \frac{dL}{dy} + c\lambda \frac{dL}{dz} + \&c.,$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = Y_{,} + a'\lambda \frac{dL}{dx} + b'\lambda \frac{dL}{dy} + c'\lambda \frac{dL}{dz} + \&c.,$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = Z_{,} + a''\lambda \frac{dL}{dx} + b''\lambda \frac{dL}{dy} + c''\lambda \frac{dL}{dz} + \&c.$$

On peut passer de ces équations à celles qui expriment les équivalences semblables entre les composantes des mêmes forces estimées

suivant les axes mobiles. Si l'on appelle, pour abréger, X, Y, Z, les composantes des forces données suivant ces axes, on aura

$$(A)\quad am\frac{d^2x^1}{dt^2} + a'm\frac{d^2y_1}{dt^2} + a''m\frac{d^2z_1}{dt^2} = X + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \&c.,$$
$$bm\frac{d^2x_1}{dt^2} + b'm\frac{d^2y}{dt^2} + b''m\frac{d^2z_1}{dt^2} = Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \&c.,$$
$$cm\frac{d^2x_1}{dt^2} + c'm\frac{d^2y_1}{dt^2} + c''m\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \&c.$$

On fera disparaître les forces dues aux liaisons, si l'on ajoute ces équations pour tous les points mobiles, après les avoir multipliées par les vîtesses relatives dx, dy, dz, &c., qui se produisent dans le mouvement du système par rapport aux axes mobiles.

Avant d'effectuer cette opération, il convient d'exprimer les premiers membres à l'aide des différentielles dx, dy, dz, et de celles des quantités $\xi, y, \zeta, a, b, c, a', b', c'$, &c., qui dépendent du mouvement des axes mobiles.

Nous désignerons, pour abréger, par d_e toutes les différentielles prises seulement par rapport aux dernières quantités a, b, c, &c., c'est-à-dire, prises en supposant que les coordonnées $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, ne varient pas, et que les points, ne se déplaçant pas par rapport aux axes mobiles, ont seulement le mouvement d'*entraînement* avec ces axes dont l'origine serait supposée immobile et qui n'auraient qu'un mouvement de rotation autour de cette origine. C'est pour rappeler que cette différentiation se rapporte à ce seul *entraînement* des axes, que nous mettrons ainsi l'initiale $_e$ en bas des d. Les d sans indices indiqueront les différentielles totales prises par rapport au temps. On a d'abord

$$dx = adx + bdy + cdz + xda + ydb + zdc + md\xi,$$
$$dy_{,} = a'dx + b'dy + c'dz + xda' + ydb' + zdc' + mdy,$$
$$dz_{,} = a''dx + b''dy + c''dz + xda'' + ydb'' + zdc'' + md\zeta,$$

et par suite

(B)

$$md^2x_{,} = m(ad^2x + bd^2y + cd^2z + 2dxda + 2dydb + 2dzdc + d_e^2x) + md^2\xi,$$
$$md^2y_{,} = m(a'd^2x + b'd^2y + c'd^2z + 2dxda' + 2dydb' + 2dzdc' + d_e^2y) + md^2\eta,$$
$$md^2z_{,} = m(a''d^2x + b''d^2y + c''d^2z + 2dxda'' + 2dydb'' + 2dzdc'' + d_e^2z) + md^2\zeta$$

Les derniers termes $m\,(d_e^2 x_, + d^2 \xi)$, $m\,(d_e^2 y_, + d^2 \eta)$, $m\,(d_e^2 z_, + d^2 \zeta)$, ne sont autre chose que les composantes dans le sens des axes immobiles, des forces qui produiraient sur chaque point le mouvement qu'il prendrait s'il restait à la même place par rapport aux axes mobiles des x, y, z. Nous désignerons ces composantes par $X_{,e}$, $Y_{,e}$, $Z_{,e}$, et nous représenterons par X_e, Y_e, Z_e, les composantes des mêmes forces dans le sens des axes mobiles x, y, z. On aura donc pour les deux derniers termes des expressions ci-dessus

$$m\left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 \xi}{dt^2}\right) = X_{,e}, \quad m\left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 \eta}{dt^2}\right) = Y_{,e}, \quad m\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right) = Z_{,e}.$$

Pour avoir la composante sur l'axe immobile des x de la force qui produirait le mouvement effectif d'une masse m, il faudra substituer les valeurs (B) dans les équations (A), et ensuite remettre X_e, Y_e, Z_e, pour les sommes

$$(a X_{,e} + a' Y_{,e} + a'' Z_{,e}),$$
$$(b X_{,e} + b' Y_{,e} + b'' Z_{,e}),$$
$$(c X_{,e} + c' Y_{,e} + c'' Z_{,e}).$$

En vertu de ce que $a da + a' da' + a'' da'' = 0$, on aura ainsi, en négligeant pour abréger d'écrire les dénominateurs dt^2 sous les différentielles du premier membre,

$$m d^2 x + 2m dy\,(a db + a' db' + a'' db'') + 2m dz\,(a dc + a' dc' + a'' dc'') + X_e = X + \lambda \frac{dL}{dx} + \&c.$$

On arrivera de même pour les composantes sur l'axe des y à

$$m d^2 y + 2m dx\,(b da + b' da' + b'' da'') + 2m dz\,(b dc + b' dc' + b'' dc) + Y_e = Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \&c.,$$

et sur l'axe des z à

$$m d^2 z + 2m dx\,(c da + c' da' + c'' da'') + 2m dy\,(c db + c' db' + c'' db'') + Z_e = Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \&c.$$

On aura des équations toutes semblables pour les autres points. Si on les multiplie par dx, dy, dz, et qu'on les ajoute, les forces $\lambda\frac{dL}{dx}$, &c., disparaîtront. On aura ainsi, en représentant par Σ la somme des termes semblables pour tous les points mobiles

$$\begin{aligned}
&\Sigma m(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) \\
&\quad + \Sigma 2mdxdy(adb + a'db' + a''db'' + bda + b'db' + b''db'') \\
&\quad + \Sigma 2mdzdx(cda + c'da' + c''da'' + adc + a'dc' + a''dc'') \\
&\quad + \Sigma 2mdydz(bdc + b'dc' + b''dc'' + cdb + c'db' + c''db'') \\
&\quad + \Sigma(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).
\end{aligned}$$

Les facteurs qui multiplient les produits $dxdy$, $dzdx$, $dydz$, sont nuls en vertu de ce que l'on a

$$\begin{aligned}
ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\
ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\
bc + b'c' + b''c'' &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi cette équation, en rétablissant le dénominateur dt^2, se réduit à

$$\Sigma m\left(dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \Sigma X_e dx + Y_e dy + Z_e dz$$
$$= \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Si l'on appelle V_r la vîtesse relative d'un point quelconque par rapport aux axes mobiles, on aura

$$V_r dV_r = dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si on désigne par P_e la force opposée à celle dont X_e, Y_e, Z_e, sont les composantes, par ds_r l'arc de courbe décrit dans le mouvement relatif d'un point quelconque par rapport aux axes mobiles, on aura

$$X_e dx + Y_e dy + Z_e dz = -P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r.$$

En se servant de notations analogues pour les forces données, et désignant par P la force dont X, Y, Z, sont les composantes, on aura

$$Xdx + Ydy + Zdz = P\cos(\widehat{P ds_r})\, ds_r$$

Ainsi l'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$\Sigma m V_r d V_r = P \cos(\widehat{P ds_r})\, ds_r + P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r.$$

En intégrant cette équation et désignant par V_r la vîtesse d'un point quelconque à la fin du temps t, et par v_r la vîtesse du même point à l'origine de ce temps, on aura

$$\Sigma \frac{m V r^2}{2} - \frac{m v_r^2}{2} = \int P \cos(\widehat{P ds_r}) ds_r + \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r.$$

Cette équation renferme ce théorème, *que le principe des forces vives a encore lieu dans le mouvement relatif aux axes mobiles, pourvu qu'aux quantités d'action* $\int P \cos(\widehat{P ds_r}) ds_r$, *calculées avec les forces données P et les arcs* ds_r *décrits dans ce mouvement relatif, on ajoute d'autres quantités d'action qui résultent des forces* P_e, *qui sont égales et opposées à celles qu'il faudrait appliquer à chaque point mobile pour lui faire prendre le mouvement qu'il aurait s'il était invariablement lié aux axes mobiles.*

Nous indiquerons plus loin le moyen de représenter ces forces et de simplifier les calculs des quantités d'action qui leur sont dues. Mais auparavant nous allons examiner les principaux avantages du théorème précédent.

Cette extension au principe des forces vives ou de la transmission de la quantité d'action donnera une équation différentielle qui suffira pour déterminer tout le mouvement quand il n'y aura qu'une variable indépendante et que le mouvement d'entraînement des axes mobiles sera donné *à priori* : la difficulté ne sera plus que dans l'intégration de cette équation où les forces P et P_e et les cosinus $\cos(\widehat{P ds_r})$, $\cos(\widehat{P_e ds_r})$ seront en général des fonctions du temps et d'une variable se rapportant à la position du système relativement aux axes mobiles.

Le but ordinaire de ce genre de problème de mouvement dans un système entraîné par une machine d'une manière donnée *à priori*, comme cela se présente pour les roues hydrauliques, est de trouver la quantité d'action transmise à la machine : nous allons chercher l'expression de cette quantité.

RECHERCHE DE LA QUANTITÉ D'ACTION OU DU TRAVAIL TRANSMIS À LA MACHINE QUI PORTE LES AXES MOBILES.

On peut appliquer le principe des forces vives au mouvement du système dans l'espace, pourvu qu'on tienne compte de toutes les forces auxquelles les points mobiles sont soumis, c'est-à-dire, pourvu qu'on ajoute aux forces données celles qui remplacent les liaisons par rapport aux axes mobiles en ayant égard au mouvement donné de ces axes. Ces forces, jointes à celles qui sont données, remettront le système dans l'état ordinaire où il n'y a pas de liaisons dépendantes du temps. La quantité d'action que ce système aura reçue par l'effet de ces forces sera en signe contraire celle qu'il aura transmise aux systèmes des axes mobiles.

Nous désignerons, pour abréger, cette dernière quantité d'action par Q; nous appellerons v et V les premières et les dernières vîtesses d'un point quelconque pour son mouvement *absolu* dans l'espace, c'est-à-dire, par rapport aux axes fixes, et nous désignerons par ds le petit arc décrit par rapport à ces mêmes axes fixes.

Le système étant devenu isolé des axes mobiles, quand on considère les forces qui produisent la quantité d'action Q, on aura par le principe des forces vives dans ce cas

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} - \Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \int P \cos(\widehat{Pds})\, ds - Q,$$

ou

$$Q = \Sigma \int P \cos(\widehat{Pds})\, ds + \Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mV^2}{2}.$$

Le calcul des quantités qui sont dans le second membre est subordonné à la connaissance du mouvement des points et aux vîtesses initiales.

Distinguons comme précédemment par des r mis en bas des lettres les quantités qui se rapportent au mouvement relatif par rapport aux axes mobiles, et par des e mis également au bas des mêmes lettres, les quantités de même nature qui se rapportent au mouvement d'entraînement de ces axes, lorsque les points matériels sont supposés liés invariablement

avec eux. Les premières et dernières vîtesses v et V seront les vîtesses résultantes de v_r, v_e, et de V_r, V_e. Ainsi on aura

$$v^2 = v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\widehat{v_r v_e}),$$
$$V^2 = V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\widehat{V_r V_e}).$$

De sorte que l'équation ci-dessus devient

$$Q = \Sigma \int P \cos(Pds) ds + \Sigma \frac{mv_r^2}{2} + \Sigma \frac{mv_e^2}{2} + \Sigma m v_r v_e \cos(\widehat{v_r v_e})$$
$$- \Sigma \frac{m V_r^2}{2} - \Sigma \frac{m V_e^2}{2} - \Sigma m V_r V_e \cos(V_r V_e).$$

Les quantités qui se rapportent aux vîtesses initiales v_r, v_e, seront données, il restera à calculer les vîtesses V_r, V_e, et le terme $\Sigma \int P \cos(Pds) ds$: c'est ce qui se fera quand on aura la connaissance complète du mouvement par l'intégration de l'équation des forces vives pour le mouvement relatif, puisque, connaissant les positions des points par rapport aux axes mobiles, on connaîtra aussi leur position dans l'espace.

Sans rien particulariser sur ces mouvemens, on peut néanmoins présenter des résultats généraux qui se simplifient beaucoup dans des hypothèses conformes à ce que présentent les applications de ces questions à la théorie des machines.

Remarquons qu'on a pour les mouvemens relatifs en vertu du principe établi au commencement de ce mémoire

$$\text{(c)} \quad \Sigma \frac{m V_r^2}{2} - \Sigma \frac{m v^2}{2} = \Sigma \int P \cos(\widehat{P ds_r}) ds_r + \Sigma \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r}) ds_r;$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente qui donne la valeur de Q, on aura

$$Q = \Sigma m \int P \cos(\widehat{Pds}) ds - \Sigma \int P \cos(\widehat{Pds_r}) ds_r - \Sigma \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r}) ds_r$$
$$+ \Sigma \frac{m v_e^2}{2} - \Sigma \frac{m V_e^2}{2} + \Sigma m v_r v_e \cos(\widehat{v_r v_e}) - \Sigma m V_r V_e \cos(\widehat{V_r V_e}).$$

Si l'on appelle ds_e le petit arc que décrirait un quelconque des points s'il

était lié invariablement aux axes mobiles; le petit arc ds, décrit dans le mouvement absolu, sera la diagonale construite sur ds_e et ds_r comme côtés. Donc si l'on projette ds, ds_e, ds_r, sur la direction de la force P, on aura

$$ds \cos(\widehat{Pds}) = ds_r \cos(\widehat{Pds_r}) + ds_e \cos(\widehat{Pds_e}),$$

ou bien

$$ds_e \cos(\widehat{Pds_e}) = ds \cos(\widehat{Pds}) - ds_r \cos(\widehat{Pds_r}).$$

En réunissant pour chaque point les deux intégrales

$$\int P \cos(\widehat{Pds})\, ds, \quad \int P \cos(\widehat{Pds_r})\, ds_r,$$

on aura donc

$$\int P \cos(\widehat{Pds})\, ds - \int P \cos(\widehat{Pds_r})\, ds_r = \int P \cos(\widehat{Pds_e})\, ds_e \,.$$

Ainsi la valeur de Q devient

$$\text{(D)} \quad Q = \Sigma \int P \cos(\widehat{Pds_e})\, ds_e - \Sigma \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r + \Sigma \frac{m v_e^2}{2}$$
$$+ \Sigma m v_r v_e (\widehat{v_r v_e}) - \Sigma \frac{m V_e^2}{2} - \Sigma m V_r V_e \cos(\widehat{V_r V_e}).$$

Telle est la formule générale du travail transmis à la machine à laquelle tiennent les axes mobiles.

Le calcul de cette valeur de Q est subordonné à celui des intégrales $\int P \cos(Pds_e)\, ds_e$, $\int P_e \cos(P_e ds_r)\, ds_r$, et aux valeurs de V_e et de V_r qui résulteront de l'intégration de l'équation (C). Nous allons voir des cas où les calculs s'exécutent sans complication, et nous montrerons comment cette formule, lors même que ces calculs ne s'achèvent pas, permet de reconnaître les circonstances qui influent sur l'accroissement ou la diminution de la quantité Q.

SIMPLIFICATION DANS LE CAS OÙ LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT DUES AUX VÎTESSES D'ENTRAÎNEMENT SE FONT ÉQUILIBRE D'ELLES-MÊMES DANS LA MACHINE AU DERNIER INSTANT.

Il y a des cas où le terme $\Sigma m V_r V_e \cos(V_r V_e)$ sera nul : pour cela il

suffira que les vîtesses d'entraînement V_e soient telles que les points étant dans les positions où ils sont, restent en équilibre dans la machine par rapport aux plans des x, y, z, sans produire aucun mouvement relatif, si l'on supprime les vîtesses relatives, et qu'on ne donne que le mouvement d'entraînement avec les axes.

En effet, les quantités de mouvement imprimées aux points seraient alors $m V_e$; les vîtesses relatives V_r sont des vitesses virtuelles pour les mouvemens de la machine; ainsi on aurait

$$\Sigma\, m\, V_e V_r \cos(V_r V_e) = 0,$$

ce qui donnera dans ce cas

$$Q = \int P \cos(\widehat{Pds_e})\, ds_e - \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r + \Sigma \frac{m v_e^2}{2} - \Sigma \frac{m V_e^2}{2} + 2\, \Sigma\, m \gamma_e v_r \cos(\widehat{v_r v_e}).$$

EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA QUANTITÉ D'ACTION QU'IL FAUT INTRODUIRE DANS L'ÉQUATION DES FORCES VIVES, EN RAISON DU MOUVEMENT DES AXES MOBILES.

Nous allons examiner comment la quantité d'action $\Sigma \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r$ dépend du déplacement de l'axe instantané de rotation des axes mobiles et de la variation de la vîtesse angulaire.

Les forces P_e peuvent se décomposer en deux espèces : les unes dont les composantes, suivant les axes fixes, sont $m \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $m \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $m \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, c'est-à-dire, les forces capables de donner à chaque point le même mouvement que l'origine des axes mobiles ; les autres dont les composantes suivant les mêmes axes fixes, sont $m \frac{d_e^2 x_1}{dt^2}$, $m \frac{d_e^2 y_1}{dt^2}$, $m \frac{d_e^2 z_1}{dt^2}$, lesquelles forces sont celles qui produiraient la rotation du système avec les axes dans la position où il se trouve à chaque instant. On choisira l'origine des coordonnées x, y, z, pour rendre le plus simples possible les forces $m \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $m \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $m \frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Par exemple, si un point se meut uniformément

ou avec un mouvement uniformément accéléré, en le prenant pour origine, ces composantes seront nulles ou constantes. Il est facile de voir que, si X', Y', Z', sont les composantes suivant les axes mobiles des forces opposées à celles qui produiraient sur chaque point le mouvement de l'origine, la quantité d'action due à ces forces directement appliquées aux points mobiles, sera

$$+\Sigma\int m(X'dx+Y'dx+Z'dz) = +\int X'\Sigma m dx+\int Y'\Sigma m dy+\int Z'\Sigma m dz.$$

Si x' y' z' sont les coordonnées, relatives aux axes mobiles, du centre de gravité du système, cette quantité devient, en appelant M la masse totale,

$$+ M\int(X'\,dx'+Y'\,dy'+Z'\,dz').$$

En désignant par P'_e la force accélératrice opposée à celle qui produirait ce mouvement de l'origine, la masse totale y étant concentrée, et par ds_r' l'arc décrit par le centre de gravité du système; on pourra encore la représenter par

$$+ M\int P'_e\cos(\widehat{P'_e ds_r'})\,ds_r.$$

Si le centre de gravité n'avait pas de mouvement relatif par rapport aux plans mobiles, cette expression serait nulle, puisque ds_r' serait nul.

Revenons au calcul de $\int P_e\cos(P_e ds_r)\,ds_r$, en ne nous occupant plus des forces dues au mouvement de l'origine des axes mobiles.

En se rappelant ce que désigne P_e, on verra facilement que les composantes sur les axes fixes de $\frac{P_e}{m}$ sont, en n'écrivant pas, pour abréger, les dénominateurs dt^2,

$$\begin{array}{l} -(x d^2a + y d^2b + z d^2c) \\ -(x d^2a' + y d^2b' + z d^2c') \\ -(x d^2a'' + y d^2b'' + z d^2c'') \end{array}$$

et sur les axes mobiles

$$\begin{aligned}
&- x(ad^2a + a'd^2a' + a''d^2a'') - y(ad^2b + a'd^2b' + a''d^2b'') \\
&\qquad\qquad - z(ad^2c + a'd^2c' + a''d^2c'') \\
&- x(bd^2a + b'd^2a' + b''d^2a'') - y(bd^2b + b'd^2b' + b''d^2b'') \\
&\qquad\qquad - z(bd^2c + b'd^2c' + b''d^2c'') \\
&- x(cd^2a + c'd^2a' + c''d^2a'') - y(cd^2b + c'd^2b' + c''d^2b'') \\
&\qquad\qquad - z(cd^2c + c'd^2c' + c''d^2c'').
\end{aligned}$$

Les projections de ds_r sur les axes mobiles sont dx, dy, dz; le moment virtuel $P_e \cos(\widehat{P_e ds_r}) ds_r$ s'obtiendra donc en faisant la somme des produits des composantes ci-dessus par dx, dy, dz : on aura ainsi la somme suivante :

$$\frac{P_e}{m}\cos(\widehat{P_e ds_r})ds_r = \left\{\begin{aligned}
&-xdx(ad^2a + a'd^2a' + a''d^2a'') - ydy(bd^2b + b'd^2b' + b''d^2b'') \\
&\qquad\qquad - zdz(cd^2c + c'd^2c' + c''d^2c'') \\
&-xdy(bd^2a + b'd^2a' + b''d^2a'') - ydx(ad^2b + a'd^2b + a''d^2b'') \\
&-zdx(ad^2c + a'd^2c' + a''d^2c'') - xdz(cd^2a + c'd^2a' + c''d^2a'') \\
&-ydz(cd^2b + c'd^2b' + c''d^2b'') - zdy(bd^2c + b'd^2c' + b''d^2c'').
\end{aligned}\right.$$

Or, en vertu des relations entre les quantités abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, on a

$$ada + a'da' + a''da'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$-(ada + a'd^2a' + a''d^2a'') = (da^2 + da'^2 + da''^2).$$

On aurait des équations toutes semblables pour les lettres b et c.

Si l'on porte sur l'axe instantané une longueur égale à la vîtesse angulaire, et qu'on appelle pqr les coordonnées par rapport aux axes mobiles du point ainsi obtenu en portant la longueur d'un côté tel que la vîtesse angulaire fasse tourner dans un sens déterminé autour de cet axe, par exemple de x vers y, si ce point était sur l'axe des z du côté des z positifs, on aura par les formules connues

$$-(adb+a'db'+a''db'')=(bda+b'da'+b''da'')=rdt$$
$$-(bdc+b'dc'+b''dc'')=(cdb+c'db'+c''db'')=pdt$$
$$-(cda+c'da'+c''da'')=(adc+a'dc'+a''dc'')=qdt,$$

et de là

$$bd^2a+b'd^2a'+b''d^2a''=-drdt-dbda-db'da'-db''da''$$
$$ad^2b+a'd^2b'+a''d^2b''=-drdt-dbda-db'da'-db''da''.$$

On aurait des résultats tout semblables pour les autres combinaisons en bc et ac.

Si l'on appelle ω_x, ω_y, ω_z, les vîtesses angulaires des axes des x, des y et des z, on aura

$$da^2+da'^2+da''^2=\omega_x^2dt^2$$
$$db^2+db'^2+db''^2=\omega_y^2dt^2$$
$$dc^2+dc'^2+dc''^2=\omega_z^2dt^2$$

et

$$dadb+da'db'+da''db''=\omega_x\omega_y\cos(\widehat{\omega_x\omega_y})dt^2$$
$$dadc+da'dc'+da''dc''=\omega_x\omega_y\cos(\widehat{\omega_x\omega_y})dt^2$$
$$dbdc+db'dc'+db''dc''=\omega_y\omega_z\cos(\widehat{\omega_x\omega_z})dt^2.$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression précédente du moment virtuel $P_e\cos(\widehat{P_eds_r})ds_r$, dans laquelle on remettra le dénominateur dt^2 qu'on n'avait pas écrit par abréviation, on aura

$$\begin{aligned}\frac{P_e}{m}\cos(\widehat{P_eds_r})ds_r = {} & \omega_x^2xdx+\omega_y^2ydy+\omega_z^2zdz\\ & +(xdy+ydx)\omega_x\omega_y\cos(\widehat{\omega_x\omega_y})\\ & +(xdz+zdx)\omega_x\omega_z\cos(\widehat{\omega_y\omega_z})\\ & +(ydz+zdy)\omega_y\omega_z\cos(\widehat{\omega_y\omega_z})\\ & -(xdy-zdz)\frac{dr}{dt}\\ & -(zdx-xdz)\frac{dq}{dt}\\ & -(ydz-xdy)\frac{dp}{dt}.\end{aligned}$$

Les quantités $x\omega_x$, $y\omega_y$, $z\omega_z$, sont les vîtesses d'entraînement des points situés sur les axes mobiles aux distances x, y, z de l'origine. Or la vîtesse d'entraînement du point dont x, y, z sont les coordonnées, est la résultante de ces trois vîtesses, comme cela résulte des relations entre les coordonnées. Ainsi en se rappelant qu'on a désigné par v_e la vîtesse d'un point supposé lié aux axes mobiles, on pourra poser

$$v_e^2 = \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega^2{}_z z^2 + 2xy\omega_x\omega_y \cos(\widehat{\omega_x\omega_y}) + 2xz\omega_x\omega_z \cos(\widehat{\omega_x\omega_z}) + 2yz\omega_y\omega_z \cos(\widehat{\omega_y\omega_z}).$$

Or, en comparant cette expression avec les six premiers termes de la valeur précédente de $P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r$, on reconnaîtra que ces termes forment la valeur de $d_r \frac{v_e^2}{2}$; le d_r désignant une différentiation faite par rapport au mouvement relatif, lorsque x, y, z changent seulement et que les vîtesses ω_x, ω_y, ω_z et leur direction ne changent pas.

Pour réduire l'autre partie de la valeur de $\frac{P_e}{m} \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r$, où se trouvent les facteurs $(xdy - ydx)$, nous désignerons par dM_r la petite aire décrite dans le temps dt par le rayon vecteur qui va de l'origine des plans mobiles à un point quelconque du système, en ne tenant compte que du mouvement relatif par rapport à ces plans, et nous représenterons par λ, μ, ν les angles que fait, avec les axes mobiles, la perpendiculaire au plan de cette aire dM_r, en portant cette ligne d'un côté tel que la rotation du rayon vecteur se fasse autour de cette direction, dans le même sens que celui qui se produit par la rotation des axes mobiles autour de l'axe instantané pris dans la direction qui va de l'origine au point dont les coordonnées sont pqr. Les trois derniers termes de la valeur de $P_e \cos(\widehat{P_e ds_r})\, ds_r$ se réduiront évidemment à

$$\left(\cos\lambda \frac{dp}{dt} + \cos\mu \frac{dq}{dt} + \cos\nu \frac{dr}{dt}\right) 2dM_r.$$

Si l'on appelle $p_1 q_1 r_1$ des quantités analogues à pqr, mais se rapportant à des axes fixes, on aura

$$p = ap_1 + a'q_1 + a''r_1$$
$$q = bp_1 + b'q_1 + b''r_1$$
$$r = cp_1 + c'q_1 + c''r_1.$$

On sait que l'axe de rotation est perpendiculaire aux vîtesses de tous les points, et par conséquent à celles de points pris à l'unité de distance sur les axes mobiles, et que les composantes des vîtesses de ces points sont da, da', da'', etc., on aura donc

$$p_1 da + q_1 da' + r_1 da'' = 0$$
$$p_1 db + q_1 db' + r_1 db'' = 0$$
$$p_1 dc + q_1 dc' + r_1 dc'' = 0;$$

ainsi, en différentiant les valeurs précédentes de pqr, on trouve, en vertu des relations ci-dessus,

$$(E)\quad \begin{aligned} dp &= adp_1 + a'dq_1 + a''dr_1 \\ dq &= bdp_1 + b'dq_1 + b''dr_1 \\ dr &= cdq_1 + c'dq_1 + c''dr_1. \end{aligned}$$

Si l'on appelle $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ les angles de l'aire dM_r avec les plans fixes des $x_1 y_1 z_1$, on aura

$$\cos\lambda_1 = a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu$$
$$\cos\mu_1 = a'\cos\lambda + b'\cos\mu + c'\cos\nu$$
$$\cos\nu_1 = a''\cos\lambda + a''\cos\mu + c''\cos\nu;$$

ainsi l'expression précédente devient, après la substitution des valeurs de dp, dq, dr, fournies par les équations (E),

$$\left(\cos\lambda_1 \frac{dp_1}{dt} + \cos\mu_1 \frac{dq_1}{dt} + \cos\nu_1 \frac{dr_1}{dt}\right) 2dM_r.$$

Mais p_1, q_1, ν_1 représentant les coordonnées d'un point porté sur l'axe instantané à une distance de l'origine égale à la vîtesse angulaire absolue qui est $\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}$, si l'on conçoit une tangente à la courbe décrite par

ce point, et qu'on appelle $d\sigma$ le petit arc qu'il décrit, ou $\sqrt{dp_1^2 + dq_1^2 + dr_1^2}$; le cosinus de l'angle de la perpendiculaire au plan de l'élément dM_r avec la tangente en question sera

$$\cos\lambda_1 \frac{dp_1}{d\sigma} + \cos\mu_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + \cos\nu_1 \frac{dr_1}{d\sigma}.$$

Il s'ensuit que, si l'on projette cette aire dM_r sur le plan perpendiculaire à cette tangente à la courbe décrite par le point dont $p_1 q_1 r_1$ sont les coordonnées, et qu'on appelle dN_r cette projection, on aura

$$2\,dN_r = 2\,dM_r \left\{\cos\lambda_1 \frac{dp_1}{d\sigma} + \cos\mu_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + \cos\nu_1 \frac{dr_1}{d\sigma}\right\}.$$

Ainsi l'expression précédente des trois derniers termes de $P_e \cos(P_e ds_r)$ ds_r deviendra

$$-\,2\,dN_r \frac{d\sigma}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{P_e}{m} \cos(P_e ds_r)\,ds_r = d_r \frac{(v_e^2)}{2} - 2N \frac{d\sigma}{dt};$$

ainsi

$$\Sigma\int P_e \cos(P_e ds_r)\,ds_r = \Sigma\int m\,d_r \frac{(v_e^2)}{2} - 2\Sigma m\int dN_r \frac{d\sigma}{dt}.$$

Si l'on intègre par partie le premier terme du deuxième membre, en vertu de la formule

$$d(v_e)^2 = d_r(v_e)^2 + d_e(v_e)^2,$$

on aura

$$\Sigma\int P_e \cos(P_e ds_v)\,ds_v = \Sigma \frac{mV_e^2}{2} - \Sigma \frac{mv_e^2}{2} - \Sigma\int m\,d_e \frac{(v_e^2)}{2}$$
$$- 2\Sigma m\int \frac{d\sigma}{dt} dN_r.$$

En appelant A_1 B_1 C_1 les momens d'inertie principaux du système pour une position instantanée des points mobiles, et en supposant que les axes mobiles soient à cet instant les axes principaux pour cette

position des points mobiles, ce qui est permis puisque jusqu'à présent ces axes mobiles ont été laissés arbitraires; on aura

$$\Sigma \frac{mv_e^2}{2} = \frac{A}{2} p^2 + \frac{B}{2} q^2 + \frac{C}{2} r^2.$$

Mais pour avoir $\Sigma m d_e \frac{(v_e)^2}{2}$, on doit différentier la valeur précédente sans faire varier les positions des points, c'est-à-dire sans faire varier $A_, B_, C_,$ et en gardant toujours pour axes principaux les axes mobiles; ainsi on aura

$$\Sigma m \frac{d_e (v_e)^2}{2} = A p dp + B q dq + C r dr.$$

Si l'on conçoit les petites aires décrites dans le temps dt par les rayons vecteurs dans le mouvement d'entraînement des axes pour une position donnée du système par rapport aux plans mobiles, les quantités $\frac{A}{2} p dt$, $\frac{B}{2} q dt$, $\frac{C}{2} v dt$ seront les sommes des projections de ces aires sur ces plans mobiles choisis comme plans principaux pour cette position du système. Si l'on appelle dM_e l'une de ces aires, et $\lambda_e \mu_e \nu_e$ les angles de la perpendiculaire à cette aire avec les axes mobiles, en la prenant d'un côté tel que la rotation du rayon vecteur se fasse autour de cette direction dans le même sens où l'on a déjà supposé qu'elle se faisait autour de la direction prise pour la perpendiculaire aux aires dM_r; on aura

$$Ap = 2 \Sigma m \frac{dM_e}{dt} \cos \lambda_e$$

$$Bq = 2 \Sigma m \frac{dM_e}{dt} \cos \mu_e$$

$$Cr = 2 \Sigma m \frac{dM_e}{dt} \cos \nu_e,$$

donc

$$Apdp + Bqdq + Crdr = 2 \Sigma m \frac{dM_e}{dt} (\cos \lambda_e dp + \cos \mu_e dq + \cos \nu_e dr).$$

Si on remet pour $dp_{,}$, $dq_{,}$, $dr_{,}$ leurs valeurs en dp_{1}, dq_{1}, dr_{1}, tirées des équations précédentes (E), et si l'on fait

$$\begin{aligned} \cos\lambda_{1e} &= a\cos\lambda_e + b\cos\mu_e + c\cos\nu_e \\ \cos\mu_{1e} &= a'\cos\lambda_e + b'\cos\mu_e + c'\cos\nu_e \\ \cos\nu_{1e} &= a''\cos\lambda_e + b''\cos\mu_e + c''\cos\nu_e, \end{aligned}$$

ce qui revient à désigner par λ_{1e}, μ_{1e}, ν_{1e}, les angles que fait l'aire dM_e avec les plans fixes; l'expression précédente deviendra

$$2\Sigma m\,\frac{dM_e}{dt}\{\cos\lambda_{1e}dp_1 + \cos\mu_{1e}\,dq_1 + \cos\nu_{1e}dv_1\};$$

donc, en appelant comme précédemment $d\sigma$ l'arc décrit par le point géométrique obtenu en prenant sur l'axe instantané de rotation une longueur égale à la vîtesse angulaire, qui est $\sqrt{p_1{}^2+q_1{}^2+r_1{}^2}$, l'expression précédente peut s'écrire ainsi:

$$2\Sigma m\,\frac{dM_e}{dt}\left\{\cos\lambda_{1e}\frac{dp_1}{d\sigma} + \cos\mu_{1e}\frac{dq_1}{d\sigma} + \cos\nu_{1e}\frac{dr_1}{d\sigma}\right\}d\sigma.$$

Si l'on représente par dN_e la projection de l'aire dM_e sur le plan perpendiculaire au petit arc $d\sigma$, la quantité ci-dessus devient

$$2\Sigma m\,\frac{dN_e}{dt}\,d\sigma;$$

ainsi la valeur de l'élément différentiel de la quantité d'action due aux forces P_e sera

$$\Sigma P_e\cos(P_e ds_r)dsr = \Sigma m d\,\frac{(v_e)^2}{dt} - 2\Sigma m\,\frac{dN_e}{dt}\,d\sigma + \\ - 2\Sigma m\,\frac{dN_r}{dt}\,d\sigma.$$

Or, si l'on désigne par dN la projection sur le même plan normal à la courbe dont $d\sigma$ est le petit arc, pour l'élément d'aire décrite dans le mouvement absolu dans l'espace par le rayon vecteur mené à l'un des points mobiles, on aura $dN = dN_r + dN_e$; on a donc

$$\Sigma P_e \cos(P_e ds_r) ds_r = \Sigma m \frac{d(v_e)^2}{2} - 2\Sigma m \frac{dN}{dt} d\sigma.$$

Ainsi, lorsqu'on ne considère que les forces dues à la rotation, la quantité d'action se réduira en définitive à

$$\Sigma \int P_e \cos(P_e ds_r) ds_r = \Sigma \frac{m V_e^2}{2} - \Sigma \frac{m v_e^2}{2} - 2\Sigma m \int \frac{dN}{dt} d\sigma,$$

On conclut de cette formule que, si les points décrivent de très-petits aires dans l'espace, ou des aires parallèles à la direction $d\sigma$, dans laquelle marche le point fictif pris sur l'axe instantané, alors la quantité d'action $\Sigma \int P_e \cos(P_e ds_r) ds_r$ est la même que si cet axe ne changeait pas, et que la vîtesse angulaire fût constante.

Si, la vîtesse angulaire des axes mobiles étant variable, ces axes tournent autour du même axe instantané; alors $\Sigma \int m \frac{dN}{dt} d\sigma$ deviendra la somme des aires projetées sur un plan perpendiculaire à cet axe. Si $d\sigma$ est nul, c'est-à-dire si la vîtesse angulaire ne varie pas, et que l'axe instantané de rotation soit fixe, alors le terme $2\Sigma m \int \frac{dN}{dt} d\sigma$ est nul, et la quantité d'action due aux forces P_e se réduit toujours à $\Sigma \frac{m V_e^2}{2} - \Sigma \frac{m v_e^2}{2}$, c'est-à-dire, à l'accroissement de la force vive due aux vîtesses d'entraînement avec les axes.

Si, pour calculer la valeur de la quantité d'action $P_e \cos(P_e ds_r) ds_r$, on a égard maintenant au mouvement de l'origine des plans mobiles, il faudra ajouter le terme $M \int P_e' \cos(P_e ds_e) ds'_r$, dans lequel M représente la somme des masses, P_e' la force accélératrice opposée à celle qui produisait le mouvement de l'origine, et ds'_r l'élément décrit par rapport aux axes mobiles par le centre de gravité des masses. Ainsi on a en général

$$\Sigma \int P_e \cos(P_e ds_r) ds_r = \Sigma \frac{m V_e^2}{2} - \Sigma \frac{m v_e^2}{2} - 2\Sigma m \int \frac{dN}{dt} d\sigma + M \int P_e' \cos(P_e' ds_e) ds_e.$$

Quand l'origine des plans mobiles a un mouvement rectiligne uniforme, ou que le centre de gravité du système ne se déplace pas par rapport aux axes mobiles, $\int P'_e \cos(P'_e ds_e) ds'_r$ est nul, et l'on a seulement

$$\Sigma \int P_e \cos(P_e ds_r) ds_r = \Sigma \frac{m_e V^2}{2} - \Sigma \frac{m_e v^2}{2} - 2\Sigma \int \frac{dN}{dt} d\sigma;$$

ce cas est presque toujours celui qui se présente dans la pratique.

En substituant cette dernière expression dans la valeur (D) de Q, on aura la quantité d'action transmise à la machine lorsque le terme $\int P'_e \cos(P'_e ds_e) ds'_e$ est nul : elle sera

$$Q = \Sigma \int P \cos(P ds_e) ds_e + \Sigma m v_e^2 - \Sigma m V_e^2 + \Sigma m v_e v_r \cos(v_r v_e)$$
$$- \Sigma m V_r V_e \cos(V_r V_e) - 2\Sigma \int m dN \frac{d\sigma}{dt}.$$

Lorsque $\int m dN \frac{d\sigma}{dt} = 0$, ce qui arrive, comme on vient de le dire, quand la rotation est uniforme, puisque $d\sigma = 0$, on a

$$Q = \Sigma \int P \cos(P ds_e) ds_e + \Sigma m v_e^2 - \Sigma m V_e^2 + \Sigma m v_e v_r \cos(\widehat{v_e v_r})$$
$$- \Sigma m V_e V_r \cos(\widehat{V_r V_e}):$$

le même résultat aurait encore lieu si, $d\sigma$ n'étant pas nul, on avait entre les limites du mouvement

$$\Sigma m \int \frac{dN}{dt} d\sigma = 0.$$

APPLICATION AUX CAS OÙ LE MOUVEMENT DE ROTATION DES PLANS MOBILES EST UNIFORME AUTOUR D'UN AXE DE DIRECTION CONSTANTE QUI N'A QU'UN MOUVEMENT DE TRANSLATION UNIFORME.

Supposons que le mouvement des plans mobiles soit un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe ou d'un axe se transportant uniformément dans l'espace parallèlement à lui-même. Alors on a $d\sigma$

$=0$, et les forces dues au mouvement de l'origine, en la prenant sur l'axe, sont nulles, de sorte que le dernier terme de la valeur précédente de Q est nul. Ainsi cette valeur devient

$$Q = \Sigma\int P\cos(P\,ds_e)\,ds_e + \Sigma m v_e^2 - \Sigma m V_e^2$$
$$+ \Sigma m v_e v_r \cos(v_e v_r) - \Sigma m V_e V_r \cos(V_e V_r).$$

Si l'on désigne par ω la vîtesse angulaire de rotation des axes mobiles, et par K et k les momens d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation dans ses premières et dernières positions, on aura

$$\Sigma\frac{mv_e^2}{2} - \Sigma\frac{mV_e^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(k - K).$$

Dans le cas où les forces P sont toutes parallèles à l'axe, alors on a

$$\cos(P\,ds_e) = 0,$$

puisque ds_e est un arc décrit dans un plan perpendiculaire à la direction de l'axe ou de P. De plus, en désignant par r et R les premières et dernières distances des points mobiles à l'axe de rotation, on a $v_e = \omega r$ et $V_e = \omega R$; la valeur de Q devient donc

$$Q = \omega\Sigma m r v_r \cos(v_r v_e) - \omega\,\Sigma m R V_r \cos(V_r V_e) - \omega^2(K - k).$$

S'il n'y a, comme on le suppose, qu'une variable indépendante dans le mouvement de la machine, on conclura la vîtesse V_r d'un de ses points de l'équation

$$\Sigma\frac{mV_r^2}{2} = \Sigma\frac{mv_r^2}{2} + \Sigma\int P\cos(\widehat{P\,ds_r})\,ds_r + \Sigma\int P_e\cos(\widehat{P_e\,ds_r})\,ds_r$$

ou à cause de

$$\Sigma\int P_e\cos(\widehat{P_e ds_r})\,ds_r = \Sigma\frac{mV_e^2}{2} - \Sigma\frac{mv_e^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(K - k)$$
$$\Sigma m\frac{V_r^2}{2} = \Sigma m\frac{v_r^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}(K - k) + \Sigma\int P\cos(\widehat{P\,ds_r})\,ds_r.$$

Les forces P étant par exemple des poids dont la direction est parallèle à l'axe de rotation supposé vertical, si l'on appelle h la hauteur

dont le centre de gravité des mobiles est descendu parallèlement à cet axe, et M la masse totale des points mobiles, on aura

$$\Sigma \int P \cos(\widehat{P ds_r})\, ds_r = g M h.$$

Enfin, si l'on appelle V_r' et v_r' les premières et dernières vîtesses pour un point particulier du système qui soit tel qu'on ait $V_r = A V_r'$ et $v_r = a v_r'$, A et a dépendant de la position de la machine et pouvant être des fonctions de l'arc s_r parcouru par ce point, on aura

$$\frac{V_r'^2}{2} \Sigma m A^2 = \frac{v_r'^2}{2} \Sigma m a^2 + \frac{\omega^2}{2}(K - k) + g M h,$$

d'où

$$V_r' = \sqrt{v_r'^2 \frac{\Sigma m a^2}{\Sigma m A^2} + \frac{\omega^2 (K - k)}{\Sigma m A^2} + \frac{2 g M h}{\Sigma m A^2}},$$

Remettant dans l'expression de Q pour v_r et V_r les produits $a v_r' A V_r'$, et substituant en même temps pour V_r' la valeur ci-dessus, on aura

$$Q = + \omega v_r' \Sigma m a r \cos(v_r V_e)$$
$$- \omega \sqrt{\left\{ v_r'^2 \frac{\Sigma m a^2}{\Sigma m A^2} + \frac{\omega^2 (K - k)}{\Sigma m A^2} + \frac{2 g M h}{\Sigma m A^2} \right\}} \Sigma m A R \cos(V_r V_e) - \omega^2 (K - k).$$

Les facteurs $\cos(v_r v_e)$, $\cos(V_r V_e)$, sont de la nature des coefficiens a et A, et dépendent aussi des positions de chaque point du système; les sommes $\Sigma m a r \cos(v_r v_e)$, $\Sigma m A R \cos(V_r V_e)$ seront des fonctions de la variable unique qui fixera la position relative de la machine au premier et au dernier instant. De sorte que, connaissant la première et la dernière position du système par rapport aux axes mobiles, et connaissant v_r' et ω, on aura Q. (Voir la note (a), en supplément.)

APPLICATION DE LA FORMULE QUI DONNE LA QUANTITÉ D'ACTION TRANSMISE À UNE ROUE HYDRAULIQUE TOURNANT AUTOUR D'UN AXE HORIZONTAL.

On peut appliquer les formules générales des articles précédens à la

question du mouvement de l'eau dans les aubes courbes des roues de M. Poncelet.

Si l'on considère l'aube comme un canal où l'eau se meut pendant qu'il est entraîné d'un mouvement de rotation uniforme, la valeur de V_r sera donnée dans ce cas par

$$\Sigma \frac{mV_r^2}{2} = \Sigma \frac{mv_r^2}{2} + \Sigma \int P \cos(\widehat{P ds_r}) ds_r + \Sigma \int P_e \cos(\widehat{P ds_r}) ds_r.$$

Si les molécules fluides sortent à la même distance de l'axe à laquelle elles sont entrées, on aura $V_e = v_e$, d'où

$$\Sigma \frac{mV_e^2}{2} = \Sigma \frac{mv_e^2}{2},$$

et par conséquent $\Sigma \int P_e \cos(\widehat{P_e ds_r}) ds = 0$; ainsi on aura

$$\Sigma \frac{mV_r^2}{2} = \Sigma \frac{mv_r^2}{2} + \Sigma \int P \cos(\widehat{P ds_r}) ds_r.$$

L'intégrale du second membre ne sera pas nulle lors même que les particules sortiront à la même hauteur à laquelle elles sont entrées, parce que, la force P faisant des angles différens avec ds_r quand l'eau monte dans l'aube et quand elle en redescend, les deux portions de signes contraires de l'intégrale pour ces deux périodes de mouvement ne sont pas égales. Suivant la forme ordinaire des aubes courbes, la gravité se rapprochera davantage de la direction de ds_r, c'est-à-dire de la tangente au canal que forme l'aube, pendant la descente de l'eau que pendant son ascension; il s'ensuit que $\Sigma \frac{mV_r^2}{2}$ est plus grand que $\Sigma \frac{mv_r^2}{2}$, et qu'ainsi l'eau sort de la roue avec une force vive relative plus grande que celle qu'elle avait en y entrant.

DE LA PRESSION QUE PRODUIT UNE VEINE FLUIDE QUI RENCONTRE OBLIQUEMENT UN PLAN FIXE OU MOBILE.

Lorsqu'il n'y a que des mouvemens de translation, les termes $\int P_e$ cos

$(\widehat{P_e ds_r})ds_r$ sont nuls, puisque les forces P_e le sont : en même temps on a $v_e = V_e$, puisque toutes les vîtesses d'entraînement sont égales. Ainsi, en reprenant la valeur (D) de Q de l'article (2), on aura

$$Q = \Sigma \int P \cos(\widehat{P ds_e})\, ds_e + \Sigma m v_r V_e \cos(\widehat{v_r V_e}) - \Sigma m V_r V_e \cos(\widehat{V_r V_e}).$$

Dans le cas où une veine fluide arrive sur un plan, si l'on suppose que ce plan ait une vîtesse d'entraînement V_e perpendiculaire à sa surface, alors la vîtesse V_r étant dirigée dans le sens du plan, on aura $\cos(V_r V_e) = 0$; ainsi

$$Q = \Sigma \int P \cos(\widehat{P ds_e})\, ds_e \quad \Sigma m v_r V_e \cos(\widehat{v_r V_e}).$$

La quantité $\int P \cos(\widehat{P ds_e}) ds_e$ ne doit être prise que pour les frottemens de l'eau. Or, les frottemens étant des actions mutuelles qui seraient en équilibre si le fluide restait immobile sur le plan, et s'il n'avait ainsi que le mouvement d'entraînement; on a $\Sigma P \cos(P ds_e) ds_e = 0$. Ainsi il reste

$$Q = \Sigma m v_r V_e \cos(\widehat{v_r V_e}).$$

V_e est ici un facteur commun. Si l'on suppose que v_r et l'angle $\widehat{v_r V_e}$ restent les mêmes pour toutes les particules fluides, et si l'on appelle M la masse totale d'eau qui a coulé sur le plan, on aura pour la quantité d'action Q transmise au plan tandis qu'il se meut avec la vîtesse V_e, et qu'il a reçu la masse M,

$$Q = M v_r \cos(\widehat{v_r V_e}) V_e.$$

On peut remarquer que, comme v est la résultante de v_r et V_e, on a en projetant ces vîtesses sur v_e,

$$v \cos(v\, V_e) = v_r \cos(v_r V_e) + V_e,$$

ou

$$v_r \cos(v_r V_e) = v \cos(v\, V_e) - V_e;$$

ainsi

$$Q = M \{ v \cos(v V_e) - V_e \} V_e.$$

Si de là on veut la quantité d'action, non plus pour une masse donnée M de fluide, mais pour un temps donné, par exemple pour une seconde; alors M sera égal à la masse d'eau qui arrive dans une seconde sur le plan. Or, si a est la section de la veine, la quantité de fluide qui arrive sur le plan dans une seconde aura pour volume av_r, et pour masse $\frac{\pi a v_r^2}{g}$, en appelant π le poids de l'unité de volume de l'eau. Ainsi on a alors pour la valeur de Q dans une seconde

$$Q = \frac{\pi a v_r^2}{g} \cos(\widehat{v_r V_e})\, V_e;$$

si on appelle P la force produite perpendiculairement au plan, on aura $Q = P V_e$; ainsi

$$P V_e = \pi a \frac{v_r^2}{g} \cos(\widehat{v_r v_e})\, V_e,$$

d'où

$$P = \pi a \frac{v_r^2}{g} \cos(\widehat{v_r V_e}).$$

Si V_e devient très-petit, alors v_r devient égal à la vîtesse absolue du fluide avant qu'il se détourne par la présence du plan; vîtesse que nous désignons par v. En même temps l'angle $\widehat{v_r V_e}$ devient l'angle de V_e avec v, c'est-à-dire celui que fait la direction de la veine fluide avec la perpendiculaire au plan ou avec la force P. Ainsi on a pour la pression produite contre ce plan

$$P = \frac{\pi a v^2}{g} \cos(\widehat{vP}).$$

Ce résultat subsiste quels que soient les frottemens de l'eau.

On peut voir qu'il subsiste même pour des mouvemens de l'eau sur le plan qui donnent des vîtesses V_r non parallèles à ce plan, pourvu que le terme $\Sigma m V_r \cos(V_r V_e)$ soit nul, ce qui aura lieu si l'on peut partager le fluide étendu sur le plan en portions qui soient telles que leurs centres de

gravité se meuvent parallèlement à sa surface; car alors $v_r \cos(v_r V_e)$ étant la vîtesse de chaque particule dans le sens perpendiculaire au plan, on aura toujours $\Sigma m v_r \cos(v_r V_e) = 0$, ou $\Sigma m v_r V_e \cos(v_r V_e) = 0$.

(Voir la note (*b*).)

NOTE (*a*).

Nous appliquerons les considérations précédentes à la théorie d'une roue à axe vertical qui est mue par une chute d'eau, et qui sert de moteur à un moulin ou à toute autre usine.

La théorie de ces roues a été donnée déjà par Borda et M. Navier; mais il ne sera pas inutile de la présenter ici comme application des résultats du mémoire précédent.

Au lieu d'appliquer directement les formules générales, nous reprendrons dans cet exemple les considérations qui y conduisent.

Nous concevrons qu'un courant d'eau sort d'un certain réservoir et descend d'abord d'une hauteur h depuis le niveau supérieur de ce réservoir, soit en parcourant un coursier, soit en tombant librement, et qu'ayant acquis après cette descente une certaine vîtesse v, il entre dans une espèce de canal tenant à une roue qui tourne autour d'un axe vertical avec une vîtesse angulaire constante ω. Nous supposerons que cette eau descend dans ce canal d'une hauteur $H - h$, et qu'elle en sort ensuite avec une vîtesse absolue V. Il s'agit de calculer la quantité d'action que reçoivent les parois du canal dans lequel l'eau est descendue, ou, ce qui est la même chose, la quantité d'action que reçoit la roue qui le porte, et par conséquent celle qu'elle communique à la machine dont elle est le moteur. Nous examinerons ensuite dans quelle circonstance cette quantité d'action est un maximum.

Considérons la descente d'une masse d'eau égale à m. Si Q est la quantité d'action transmise à la roue par cette masse, et si A représente la perte d'action due aux actions moléculaires par l'effet du choc que l'eau éprouve à son entrée dans le canal, on a par le principe des forces vives pour le mouvement absolu

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mg(H-h) - Q - A.$$

Ici nous écrirons pour abréger $\frac{mV^2}{2}$ au lieu de la somme des forces vives (*) étendue à toutes les molécules de la masse m si toutes les vîtesses n'étaient pas égales. On tire de là

$$Q = mg(H-h) + \frac{mv^2}{2} - \frac{mV^2}{2} - A.$$

Pour rendre Q le plus grand possible, H et h étant donnés, il faut rendre A et V le plus petits possible. A ne provenant que du choc à l'entrée du fluide dans le canal,

(*) Nous continuons ici d'appliquer la dénomination de *force vive* à la moitié du produit mV^2, ainsi que nous l'avons fait dans ces Mémoires, et dans celui qui a pour titre *Du calcul de l'effet des Machines.*

on peut rendre cette perte sensiblement nulle en disposant l'inclinaison du canal à son entrée dans la direction même de la vîtesse relative, qui est la résultante de V et d'une vîtesse opposée à celle du canal. Dans ce cas, la vîtesse absolue de l'eau restera à très-peu près v à son entrée dans le canal; cela étant admis, on aura seulement

$$Q = mg(H - h) + \frac{mv^2}{2} - \frac{mV^2}{2}.$$

Il ne reste qu'à calculer V^2 pour avoir la quantité d'action Q. Pour que cette quantité devienne la plus grande possible relativement à V, il faudra que V devienne nul ou le plus petit possible. Si l'on désigne par R la distance à l'axe de rotation du point du canal par où l'eau sort en bas de la roue, et par V_r la vîtesse relative au canal pour l'eau qui en sort, on aura

$$V^2 = V_r^2 + \omega^2 R^2 + 2\omega R V_r \cos(\omega V_r).$$

Ainsi la condition pour que Q soit un maximum étant $V = 0$ deviendra

$$0 = V_r^2 + \omega^2 R^2 + 2\omega R V_r \cos(\widehat{\omega V_r}):$$

équation qui exige, comme on sait, que l'on ait $\cos(\omega V_r) = -1$ et $V_r = \omega R$: il reste à calculer V_r. Pour cela on appliquera le principe des forces vives au mouvement relatif, en remarquant que, ω étant la vîtesse angulaire de la roue et r la distance de l'entrée du canal à l'axe de rotation, la quantité d'action qu'il faut ajouter en vertu du principe établi dans ce mémoire, c'est-à-dire celle qui est due ici aux forces centrifuges de la rotation, ayant pour expression l'accroissement de force vive du au seul mouvement de rotation, sera

$$\frac{m\omega^2}{2}(R^2 - r^2).$$

Ainsi, en appelant toujours v_r la vîtesse relative de l'eau dans le canal au point où elle y entre, on a

$$\frac{mV_r^2}{2} - \frac{mv_r^2}{2} = mg(H - h) + \frac{m\omega^2}{2}(R^2 - r^2).$$

Mais puisque v est la résultante de v_r et de ωr, on a

$$v_r^2 = v^2 + \omega^2 r^2 - 2\omega r v \cos(\omega v).$$

Ainsi

$$\frac{mV_r^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - m\omega r v \cos(\omega v) + mg(H - h) + \frac{m\omega^2}{2}(R^2 - r^2).$$

Pp*

Comme on doit avoir, pour que Q soit un maximum, $V_r = \omega R$, cette équation devient, en réduisant,

$$(A) \quad 0 = \frac{mv^2}{2} - m\,\omega r v \cos(\omega v) + mg(H - h).$$

Cette condition étant jointe à $\cos(\omega V_r) = -1$, donnera Q le plus grand possible : sa valeur est alors

$$Q = mg(H - h) + \frac{mv^2}{2}.$$

On tire de l'équation (A) ci-dessus

$$\omega r = \frac{g(H - h) + \frac{v^2}{2}}{v\cos(v\omega)}.$$

Telle est la formule qui indique la relation qui doit exister entre la vîtesse v de l'eau qui entre dans le canal, son angle avec la vîtesse de rotation ω, et la vîtesse de rotation ωr à l'entrée du canal qui reçoit cette eau dans la roue. On voit qu'on peut faire tourner ces roues très-vîte, sans perdre de leur effet, pourvu que $\cos(v\omega)$ soit très-petit, ou bien que v lui-même soit très-petit, c'est-à-dire que h le soit.

Si l'on admet qu'il n'y ait que des pertes d'action insensibles dans la descente de l'eau de la hauteur h, depuis le niveau supérieur jusqu'à son entrée dans le canal tournant, on aura

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

La valeur maximum Q devient alors

$$Q = mgH,$$

et la condition pour que cette valeur soit arrivée à ce maximum devient

$$\omega r = \frac{gH}{v\cos(\omega v)}.$$

NOTE (b).

On peut retrouver directement de la manière suivante la pression produite contre le plan par la veine fluide.

On concevra que le plan ait une vîtesse u perpendiculaire à sa surface, et que, pendant qu'il se meut ainsi, la veine fluide l'atteint avec une vîtesse absolue v, et par conséquent avec une vîtesse relative qui sera la résultante de v et d'une vîtesse égale et opposée à u.

La quantité d'action due aux forces moléculaires pendant le mouvement de déviation du fluide contre le plan pour l'unité de temps, pourra s'évaluer dans le mouvement relatif en appliquant le principe des forces vives à ce mouvement. Si l'on désigne par A cette quantité d'action, par w la vîtesse d'une molécule du fluide relativement au plan considéré comme fixe quand une fois cette vîtesse est devenue parallèle à ce plan; $v^2+u^2-2uv\cos\widehat{(uv)}$ étant le carré de la vîtesse relative du fluide avant qu'il se soit dévié par l'action du plan, on aura

$$2A = \Sigma m(v^2 + u^2 - 2u\cos uv) - \Sigma m w^2;$$

le Σ s'étendant à la quantité de fluide qui arrive sur le plan en une seconde.

Appliquons maintenant le principe des forces vives au mouvement absolu du fluide, en ayant égard aux actions moléculaires et à la pression produite sur le plan qui réagit sur le fluide.

Si P est la pression sur le plan, la quantité d'action que celui-ci produit sur le fluide dans une seconde sera $-Pu$. Ainsi la diminution de force vive du fluide qui passe sur le plan dans une seconde sera

$$Pu + A$$

pour toute l'étendue du mouvement de déviation des molécules. La force vive du fluide qui arrive sur le plan était primitivement

$$\frac{\Sigma m v^2}{2};$$

le Σ s'étendant à toute la quantité de fluide qui arrive sur le plan dans une seconde.

La force vive des mêmes molécules fluides, lorsqu'elles se meuvent parallèlement au plan, et qu'elles ont accompli leur déviation, est

$$\frac{\Sigma m(w^2 + u^2)}{2},$$

puisque la vîtesse absolue d'une molécule est la résultante de la vîtesse relative w et de la vîtesse u, qui est perpendiculaire à w.

On a donc, par le principe des forces vives appliqué au mouvement absolu,

$$\frac{\Sigma m v^2}{2} - \frac{\Sigma m(w^2 + u^2)}{2} = Pu + A.$$

Or, on a $2A = \Sigma m(r^2 + u^2 - 2uv\cos uv) - \Sigma m w^2$. Ainsi il viendra, en substituant et tirant Pu,

$$2Pu = \Sigma m v^2 - \Sigma m(w^2 + u^2) - \Sigma m(v^2 + u^2 - 2uv\cos uv) + \Sigma m w^2;$$

ou, en réduisant,

$$P = \Sigma m(v\cos uv - u).$$

Si a est la section de la veine, la quantité de fluide Σm, qui passe sur le plan dans une seconde, est

$$\Sigma m = a\left(v - \frac{u}{\cos uv}\right) \times \frac{\varpi}{g},$$

ϖ étant le poids de l'unité de volume du fluide. Ainsi on a

$$P = \frac{\varpi}{g}\, a\, \frac{(v\cos uv - u)^2}{\cos uv};$$

si $u = 0$, c'est-à-dire si le plan est immobile, alors on trouve

$$P = \frac{\varpi}{g}\, a v^2 \cos(uv).$$

Telle est l'expression de la pression produite par une veine fluide sur un plan immobile qu'elle rencontre sous une inclinaison quelconque (uv) avec la normale au plan.

Cette formule ne suppose autre chose qu'un écoulement qui ait assez de durée pour qu'il devienne permanent et pour que les molécules fluides finissent par ne plus avoir que des vîtesses parallèles au plan. Du reste, il peut exister des frottemens sur le plan et des actions moléculaires quelconques entre les molécules du fluide; celui-ci peut être très-visqueux sans que la pression change; seulement le frottement sur le plan donnera lieu à une action dans le sens du plan, mais qui ne changera rien à la composante P perpendiculaire au plan.

MÉMOIRE

Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps;

Par G. CORIOLIS.

Dans un Mémoire qui fait partie du XXIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* j'ai montré que pour appliquer le principe des forces vives aux mouvemens relatifs des systèmes entraînés avec des plans coordonnés ayant un mouvement quelconque dans l'espace, il suffisait d'ajouter aux forces données d'autres forces opposées à celles qui sont capables de forcer les points matériels à rester invariablement liés aux plans mobiles auxquels on rapporte les mouvemens relatifs.

J'ai fait remarquer dans ce Mémoire que la proposition qui en est l'objet, ne peut s'appliquer en général à d'autres équations du mouvement que celles des forces vives; mais je n'avais pas examiné alors s'il y a des circonstances où la marche qu'elle fournit peut s'appliquer à certaines équations du mouvement; et si, dans le sens où elle ne s'applique pas, on peut donner une expression simple des nouveaux termes de correction.

C'est la question dont je me suis occupé dans le Mémoire que je présente aujourd'hui. J'y donne cette proposition générale, savoir : que pour établir une équation quelconque de mouvement relatif d'un système de corps ou d'une machine quelconque, il suffit d'ajouter aux forces existantes deux espèces de forces supplémentaires; les premières sont toujours celles auxquelles il faut avoir égard pour l'équation des forces vives, c'est-à-dire que ce sont des forces opposées à celles qui sont capables de maintenir les points matériels invariablement liés aux plans mobiles : les secondes sont dirigées perpendiculairement aux vitesses relatives et à l'axe de rotation des plans mobiles; elles

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

sont égales au double du produit de la vitesse angulaire des plans mobiles multipliée par la quantité de mouvement relatif projetée sur un plan perpendiculaire à cet axe.

Ces dernières forces ont la plus grande analogie avec les forces centrifuges ordinaires.

Pour mettre en évidence cette analogie, il suffit de remarquer que la force centrifuge est égale à la quantité de mouvement multipliée par la vitesse angulaire de la tangente à la courbe décrite, et qu'elle est dirigée perpendiculairement à la vitesse et dans le plan osculateur, c'est-à-dire perpendiculairement aussi à l'axe de rotation de la tangente. Ainsi, pour passer de ces forces centrifuges ordinaires aux secondes forces dont les doubles entrent dans l'énoncé précédent; on n'a qu'à remplacer la vitesse angulaire de la tangente par celle des plans mobiles, et substituer à la direction de l'axe de rotation de cette tangente, la direction de l'axe de rotation de ces mêmes plans mobiles. En d'autres termes, il suffit de substituer à tout ce qui se rapporte en grandeur et en direction à la rotation de la tangente, ce qui se rapporte à celle des plans mobiles, et de prendre le double des forces ainsi obtenues.

C'est à cause de cette analogie que j'ai cru devoir donner à ces nouvelles forces la dénomination de *forces centrifuges composées* : elles participent en effet du mouvement relatif par la quantité de mouvement, et du mouvement des plans mobiles par l'emploi de leur axe de rotation et de leur vitesse angulaire.

On dira donc que pour poser une équation de mouvement relatif, qui n'est pas celle des forces vives, il faut introduire de plus que pour cette équation, les double *des forces centrifuges composées*.

Les directions de ces secondes forces supplémentaires étant perpendiculaires aux vitesses relatives, on voit de suite qu'elles disparaissent dans l'équation des forces vives pour le mouvement relatif, puisqu'on n'emploie dans cette dernière que les composantes des forces dans le sens des vitesses relatives.

C'est dans cette disparition de ces *forces centrifuges composées* que

consiste le théorème que j'ai présenté à l'Académie des Sciences, en 1831. Il devient maintenant un cas particulier de l'énoncé plus général sur l'introduction de ces *forces centrifuges composées.*

Il y a dans certaines circonstances d'autres équations où ces forces centrifuges composées disparaissent encore; ce sont celles qui se rapportent à des mouvemens relatifs qui s'opèrent dans des plans mobiles qui peuvent rester parallèles à l'axe de rotation de ces plans. Il est clair en effet que les forces centrifuges qui sont perpendiculaires à cet axe de rotation, aussi bien qu'aux vitesses relatives, disparaissent quand on ne s'occupera que des projections des forces relatives sur les plans dans lesquels les mouvemens s'opèrent.

On peut aussi présenter l'introduction des *forces centrifuges composées*, en employant dans les énoncés les vitesses virtuelles relatives qui ont servi à obtenir chaque équation de mouvement. On arrive ainsi à cette proposition, que les deux espèces de termes supplémentaires qui entrent dans une équation de mouvement relatifs sont, les premiers, les momens virtuels des mêmes forces qui entrent dans l'équation des forces vives, et les seconds, les doubles des sommes des aires des parallélogrammes construits sur les vitesses relatives et les vitesses virtuelles, ces aires étant projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation des plans mobiles.

Ce dernier énoncé montre dans quels cas ces seconds termes supplémentaires disparaissent, non plus isolément, comme on le voyait seulement par la direction des *forces centrifuges composées*, mais dans leur ensemble.

Ainsi, si l'axe de rotation a une position fixe dans l'espace, et conséquemment fixe aussi par rapport aux plans mobiles, les forces centrifuges composées disparaissent toujours dans l'équation du mouvement de la projection du centre de gravité sur une ligne parallèle à cet axe.

Si le centre de gravité ne peut se mouvoir que sur une droite fixe par rapport au plan mobile, les forces centrifuges composées disparaissent dans l'équation du mouvement relatif de ce centre.

Dans les équations des aires, les forces centrifuges composées ne disparaissent que dans le cas très particulier où l'axe de rotation des plans mobiles est fixe en direction, et qu'on prend les aires sur un plan qui lui est perpendiculaire et autour d'un axe par rapport auquel les momens d'inertie du système ne changent pas pendant le mouvement relatif.

Voici les démonstrations des propositions qu'on vient d'énoncer.

Désignons par x, y, z, des coordonnées rapportées aux plans mobiles; par $L=0$, etc., les équations de liaisons des points mobiles, lesquelles sont supposées exprimées par ces coordonnées relatives x, y, z. Représentons par λ, etc., des coefficiens disponibles; par X_e, Y_e, Z_e, les forces qui produiraient les mouvemens dus à la liaison avec les plans mobiles; et enfin par abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, les cosinus des angles que font les axes mobiles avec des axes fixes.

On a établi, dans le mémoire déjà cité, page 275 du *Journal de l'École Polytechnique*, XXI[e] cahier, que pour un des points matériels dont m est la masse, on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2(adb+a'db'+a''db'')\,mdy$$
$$+2(adc+a'dc'+a''dc'')mdz=X-X_e+\lambda\frac{dL}{dx}+\text{etc.},$$

$$m\frac{d^2y}{dt}+2\left(\frac{bda}{dt}+\frac{b'da'}{dt}+\frac{b''da''}{dt}\right)m\frac{dx}{dt}$$
$$+2\left(\frac{bdc}{dt}+\frac{b'dc'}{dt}+\frac{b''dc''}{dt}\right)m\frac{dz}{dt}=Y-Y_e+\lambda\frac{dL}{dy}+\text{etc.},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+2(cda+c'da'+c''da'')\,mdx$$
$$+2(cdb+c'db'+c''db'')\,mdy=Z-Z_e+\lambda\frac{dL}{dz}+\text{etc.}$$

Désignons comme à l'ordinaire par p, q, r, les trois projections de la vitesse angulaire de rotation des plans mobiles sur ces mêmes plans, ou en d'autres termes les trois vitesses angulaires de ces plans prises autour de leurs axes. Ces équations deviendront ainsi

$$(A)\quad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\left(rm\frac{dy}{dt} - qm\frac{dz}{dt}\right) + X - X_e + \lambda\frac{dL}{dx} + \text{etc.},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 2\left(pm\frac{dz}{dt} - rm\frac{dx}{dt}\right) + Y - Y_e + \lambda\frac{dL}{dy} + \text{etc.},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= 2\left(qm\frac{dx}{dt} - pm\frac{dy}{dt}\right) + Z - Z_e + \lambda\frac{dL}{dz} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Nous voyons ici, dans l'expression des forces qu'on doit considérer dans les mouvemens relatifs, deux termes supplémentaires; les uns sont exprimés par $-X_e$, $-Y_e$, $-Z_e$, et sont des forces opposées à celles qui seraient capables d'obliger les points mobiles à rester invariablement liés aux plans coordonnés mobiles; les autres sont exprimés par

$$2\left(rm\frac{dy}{dt} - qm\frac{dz}{dt}\right),$$
$$2\left(pm\frac{dz}{dt} - rm\frac{dx}{dt}\right),$$
$$2\left(qm\frac{dx}{dt} - pm\frac{dy}{dt}\right).$$

Remarquons que si x, y, z, x', y', z', sont les projections de deux longueurs r et r'; le parallélogramme construit sur r et r', et dont l'expression est $rr'\sin(rr')$, a pour projections sur les plans coordonnés

$$(xz' - zx'),$$
$$(xy' - yz'),$$
$$(yx' - xy').$$

Les expressions ci-dessus peuvent être aussi les projections sur les axes coordonnés d'une longueur égale à $rr'\sin(rr')$, laquelle sera portée perpendiculairement au plan des deux droites r et r' et sera située du même côté, par rapport au sens qui va de r vers r', que l'axe des z l'est par rapport au sens qui va de y vers x.

D'après cette remarque, les expressions ci-dessus en p, q, r, dx, dy, dz, seront les doubles des composantes suivant les axes d'une force dirigée perpendiculairemeut au plan de l'axe de rotation et de la vitesse

relative; laquelle force aura pour grandeur le produit de la vitesse angulaire $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, multipliée par la projection ou la composante, dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation; de la quantité de mouvement due à la vitesse relative du point matériel. Le sens dans lequel cette force devra être portée, par rapport à un mouvement se dirigeant de l'axe de rotation vers la vitesse relative, sera le même que celui de l'axe de rotation par rapport à la vitesse de rotation.

L'introduction des termes ci-dessus revient donc à celle d'une nouvelle force, qui a une analogie complète avec la force centrifuge ordinaire.

En effet, en désignant par ω la vitesse angulaire avec laquelle tourne la tangente à la courbe décrite par un point matériel dont la masse est m, par v la vitesse; la force centrifuge ordinaire peut se mettre sous la forme

$$\omega m v,$$

c'est-à-dire qu'elle est le produit de cette vitesse angulaire multipliée par la quantité de mouvement du point matériel; de plus, sa direction est à la fois perpendiculaire à la vitesse v et à l'axe de rotation de la tangente, puisqu'elle est dans le plan osculateur qui est celui dans lequel tourne la tangente.

On voit donc que, pour passer des forces centrifuges ordinaires aux secondes forces dont les doubles entrent dans les équations du mouvement relatif, il suffit de substituer en même temps, à l'axe de rotation de la tangente, à la vitesse angulaire, et à la quantité de mouvement du point mobile; l'axe de rotation des plans mobiles, la vitesse angulaire de ces plans, et la quantité de mouvement projeté sur un plan perpendiculaire à cet axe.

Ces secondes forces centrifuges, résultant de l'emploi simultané des mouvemens relatifs et des mouvemens des plans mobiles, on peut les nommer *forces centrifuges composées.* On arrive ainsi à cette proposition, que *les expressions des forces à ajouter aux forces données pour avoir les expressions des forces dans les mouvemens relatifs*

sont, 1°. celles qui sont opposées aux forces capables de produire sur chaque point le mouvement qu'il aurait s'il était lié aux plans mobiles, 2°. les doubles des forces centrifuges composées.

On voit de suite que ces secondes forces disparaissent dans l'équation des forces vives comme les forces centrifuges ordinaires, puisqu'elles sont dirigées perpendiculairement aux vitesses relatives, et qu'on n'obtient l'équation des forces vives qu'en projetant les forces relatives sur la direction des vitesses relatives elles-mêmes.

Elles disparaissent aussi lorsque les mouvemens relatifs doivent se faire dans des plans parallèles à l'axe de rotation des plans mobiles, puisque les équations du mouvement dans ces plans ne contiendront pas des forces qui, étant perpendiculaires à l'axe de rotation, le seront aussi aux plans dans lesquels les mouvemens s'opèrent.

On peut encore, si l'on veut, donner un autre énoncé des termes de correction dus à ces forces centrifuges composées, lorsqu'on les considère, non plus isolément dans l'expression de chaque force, mais dans une équation quelconque du mouvement obtenue en choisissant un système de vitesses virtuelles relatives.

En appelant δx, δy, δz, etc., les composantes des vitesses virtuelles prises dans le mouvement relatif, c'est-à-dire des vitesses compatibles avec les liaisons relatives exprimées par $L=0$, etc., on aura, en indiquant par Σ une somme s'étendant à tous les points qui entrent dans l'équation $L=0$,

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z\right) = 0.$$

En multipliant chacune des équations (A) par la vitesse virtuelle correspondante et les ajoutant toutes ensemble, les termes en $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$, etc., s'en iront, c'est-à-dire que ces forces qui proviennent des liaisons s'élimineront, et il viendra

$$(B)\quad \begin{aligned} \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) &+ 2p\Sigma m\left(\frac{dy\delta z - dz\delta y}{dt}\right) \\ &+ 2q\Sigma m\left(\frac{dz\delta x - dx\delta z}{dt}\right) \\ &+ 2r\Sigma m\left(\frac{dx\delta y - dy\delta x}{dt}\right) \\ = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) &- \Sigma(X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z). \end{aligned}$$

Telle est la formule générale qui donnera toutes les équations se rapportant aux mouvemens relatifs.

Ces équations, au lieu d'être à deux termes comme pour les mouvemens absolus, contiennent toujours quatre espèces de termes qui dépendent 1°. des différentielles secondes; 2°. des différentielles premières; 3°. des variables elles-mêmes; 4°. de termes qui dépendent des forces données, lesquelles, suivant les cas, dépendront des coordonnées ou de leurs différentielles premières.

On voit qu'il y a deux espèces de termes supplémentaires; les uns sont dus aux forces X_e, Y_e, Z_e, qui dépendent ainsi des coordonnées x, y, z, qui sont les inconnues du problème; les autres qui dépendent des différentielles dx, dy, dz de ces inconnues.

Remarquons que le facteur

$$m(dy\delta z - dz\delta y)$$

n'est autre chose que l'aire du parallélogramme construit sur la projection de la vitesse effective et de la vitesse virtuelle sur le plan des yz; ainsi

$$\Sigma m(dy\delta z - dv\delta y)$$

sera la somme algébrique de toutes les aires semblables pour tous les points du système.

Chacune de ces aires, dans l'espace, peut s'exprimer par........ $mds\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})$. En représentant par λ, μ, ν, les angles que la per-

pendiculaire à son plan fait avec les axes coordonnés, on aura

$$\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}\delta z - \frac{dz}{dt}\delta y\right) = \Sigma m\frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})\cos\lambda,$$
$$\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}\delta x - \frac{dx}{dt}\delta z\right) = \Sigma m\frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})\cos\mu,$$
$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta y - \frac{dy}{dt}\delta x\right) = \Sigma m\frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})\cos\nu.$$

Représentons par α, β, γ, les angles que l'axe instantané de rotation des plans mobiles fait avec ces axes, et par ω leur vitesse angulaire de rotation autour de cet axe; on aura

$$p = \omega \cos\alpha,$$
$$q = \omega \cos\beta,$$
$$r = \omega \cos\gamma.$$

La somme des termes en question dans l'équation (B), devient ainsi égale à

$$2\omega\Sigma m\frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu).$$

On voit que c'est la somme des projections des aires $m\frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})$ sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Ainsi l'on peut dire que, *pour avoir une équation du mouvement relatif, il faut ajouter aux termes ordinairement existans pour le mouvement absolu, d'abord celui qui provient des forces qui sont capables de forcer les points à rester invariablement liés aux plans mobiles, et en outre un terme qui est égal à deux fois la vitesse angulaire de rotation des axes mobiles multipliée par la somme des projections sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de ces plans, de toutes les aires des parallélogrammes compris entre les quantités de mouvement effectives et les vitesses virtuelles.*

Dans le cas de l'équation des forces vives, chaque aire est nulle, puisque la vitesse virtuelle coïncide avec la vitesse effective; la somme de ces aires l'est donc aussi, et le dernier terme de correction dispa-

raît. Cette remarque forme précisément le théorème que j'ai donné sur le principe des forces vives dans les mouvemens relatifs.

Il y a un autre cas assez général où ces aires disparaissent aussi, c'est celui où les mouvemens relatifs et virtuels se font pour chaque point dans un plan parallèle à l'axe de rotation des plans mobiles. Il est clair, en effet, que les aires comprises entre ces deux vitesses deviennent nulles en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Ainsi, dans ce cas, toutes les équations du mouvement, par exemple, celles du centre de gravité et des aires ont lieu pour le mouvement relatif, en ajoutant seulement les forces $-X_e$, $-Y_e$, $-Z_e$.

Lorsqu'on veut avoir des équations qui, pour ce mouvement relatif, se rapportent au centre de gravité, c'est-à-dire qui résultent de vitesses virtuelles égales et parallèles à l'un des axes mobiles, il suffit d'ajouter ensemble toutes les équations (A) qui se rapportent à une même coordonnée.

En représentant par ξ, η et ζ, les coordonnées du centre de gravité, par rapport aux axes mobiles, et posant $\Sigma m = M$, on a

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = M \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

et

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2\zeta}{dt};$$

ce qui donne pour les sommes en question, où les forces $\lambda \frac{dZ}{dx}$, etc., disparaissent toujours,

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned} M \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2M\left(q \frac{d\zeta}{dt} - r \frac{d\eta}{dt}\right) &= \Sigma X - \Sigma X_e, \\ M \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2M\left(r \frac{d\xi}{dt} - p \frac{d\zeta}{dt}\right) &= \Sigma Y - \Sigma Y_e, \\ M \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2M\left(p \frac{d\eta}{dt} - q \frac{d\xi}{dt}\right) &= \Sigma Z - \Sigma Z_e. \end{aligned}$$

Si, dans le mouvement relatif, le centre de gravité du système reste

sur une droite parallèle à l'axe de rotation des plans mobiles, on a

$$\frac{d\xi}{p} = \frac{d\eta}{q} = \frac{d\zeta}{r},$$

ou bien

$$q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{at} = 0,$$

$$r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

$$p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Ainsi les équations ci-dessus n'ont plus de second terme, et se réduisent à

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X - \Sigma X_e,$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y - \Sigma Y_e,$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z - \Sigma Z_e.$$

Une seule de ces trois peut subsister de la même manière sans le second terme de correction, si la direction de la coordonnée relative, qui entre dans la différentielle du deuxième ordre, se trouve perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et à la vitesse du centre de gravité. Car alors, si c'est la coordonnée ξ, par exemple, on a

$$\frac{d\eta}{q} = \frac{d\zeta}{r}.$$

Ainsi quand deux axes seulement des coordonnées relatives sont mobiles, et que le troisième, celui des ξ, par exemple, reste parallèle à l'axe de rotation auquel se rapportent les quantités p, q, r, comme on a alors $q = 0$, $r = 0$, on aura l'équation

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X - \Sigma X_e.$$

Enfin, si le centre de gravité se meut sur une ligne donnée par rapport au plan mobile; en la prenant pour axe des ζ, on aura $\frac{d\eta}{dt} = 0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$, et par suite,

$$\mathrm{M}\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\mathrm{X} - \Sigma\mathrm{X}_e.$$

Si maintenant nous voulons examiner ce que deviennent les équations des aires, il faudra, dans l'équation (B), prendre des vitesses virtuelles de rotation autour d'un des axes des coordonnées, par exemple, poser

$$\delta z = 0, \quad x\delta x + y\delta y = 0,$$

ou

$$\delta z = 0, \quad \frac{\delta x}{y} = \frac{\delta y}{-x}.$$

On obtiendra ainsi

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2r\Sigma m\,(xdx + ydy)$$
$$+ \Sigma m\,(px + qy)\,dz = \Sigma(\mathrm{X}y - \mathrm{X}x) - \Sigma(\mathrm{X}_e y - \mathrm{Y}_e x).$$

Cette équation, ainsi que les deux autres semblables qu'on obtiendrait pour les vitesses virtuelles de rotation autour des autres axes de coordonnées, ne se simplifient pas en général.

Si l'axe de rotation des plans mobiles a une direction constante dans l'espace, auquel cas on sait qu'il en est ainsi par rapport aux axes mobiles; on pourra le prendre pour axe des z, et l'on aura

$$p = 0, \quad q = 0.$$

L'équation ci-dessus devient alors

$$\Sigma m\left(\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2}\right) - 2r\Sigma m\,(xdx + ydy)$$
$$= \Sigma\,(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x) - \Sigma\,(\mathrm{X}_e y - \mathrm{Y}_e x).$$

Ainsi cette relation est toujours au nombre des équations du mouvement relatif quand l'axe de rotation du mouvement qui entraîne les plans mobiles a une direction constante dans l'espace. Si les points mobiles, dans leur mouvement relatif, ne changent pas de distance par rapport à l'axe autour duquel on prend les aires; c'est-à-dire à partir duquel on compte ici les coordonnées x et y; le terme de correction $2r\Sigma m(xdx + ydy)$ disparaît dans l'équation ci-dessus.

Si les forces XY sont dirigées vers l'origine des coordonnées, elles disparaissent de cette équation. Il en sera de même des forces X_e, Y_e, si l'axe de rotation conserve une direction constante qu'on prenne pour axe des z, et si la vitesse angulaire de rotation des plans mobiles est uniforme, c'est-à-dire si r est constant et égal à ω; on aura donc

$$\Sigma m\left(\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2}\right) = 2\omega\Sigma m(xdx + ydy).$$

En désignant par A le moment d'inertie variable du système à un instant quelconque, et par λ la somme des aires décrites sur le plan des x, y; on aura, en intégrant entre deux instans, et indiquant la première limite par l'indice zéro,

$$\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\lambda_0}{dt} = 2\omega(A - A_0).$$

Ainsi, dans les hypothèses précédentes, les différentielles des aires dans les mouvemens relatifs, lorsqu'elles sont projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, croissent comme les momens d'inertie.
